

ОТГОВОРИ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ ТЕМАТА ЗА XI КЛАС

Задача 7. Ясно е, че ако дописваната цифра е 0, 2, 4, 5, 6 или 8, стойността на влога ще бъде съставно число още след първото олихвяване. (1 точка)

Ако дописваната цифра е 1 или 7 и след първото олихвяване стойността на влога е число, което се дели на 3, доказателството е завършено. (1 точка)

Ако дописваната цифра е 1 или 7 и след първото олихвяване стойността на влога е число, което при деление с 3 дава остатък 1, достатъчни са още две дописвания и стойността ще се дели на 3. (1 точка)

Ако дописваната цифра е 1 или 7, но след първото олихвяване стойността на влога е число, което при деление с 3 дава остатък 2, достатъчно е само още едно дописване и стойността ще се дели на 3. (1 точка)

Остава да разгледаме случая, в който се дописва цифрата 3 или 9. Ще се спрем на 3, защото случаят на 9 е аналогичен. Нека в даден момент стойността на влога е просто число p . Да разгледаме числата 3, 33, 333, ..., $\underbrace{333\dots3}_n$, като последното е с $(p + 1)$ на брой тройки. Тъй като броят на тези числа е $(p + 1)$, то от принципа на Дирихле следва, че при делението им с p , поне две от тях ще са с равни остатъци и тяхната разлика ще се дели на p . Освен това разликата е число от вида $\underbrace{333\dots3}_n \cdot 10^k$, където $n, k \geq 1$. От друга страна p

е просто и е по-голямо от 10, откъдето следва, че $p \neq 2$ и $p \neq 5$. Следователно 10^k не се дели на p . Заклучаваме, че със сигурност $\underbrace{333\dots3}_n$ се дели на p . Сега е достатъчно вдясно

от p да допишем точно n тройки и полученото число ще се дели на p , т.е. то ще е съставно. (5 точки)

За случая, когато се дописва цифра 9, трябва изрично да се отбележи, че той е аналогичен. (1 точка). Ако този случай е обяснен подробно, тогава той се оценява с (5 точки), а допълнителната точка се присъжда за случая на цифра 3 при отбелязване на аналогията. Всъщност идеята на доказателството при дописвана цифра 3 може да се използва не само за дописвана цифра 9, но също за цифри 1 и 7. Ако разгледаните по-горе случаи на 1 и 7 са пропуснати, то отбелязване на аналогията за тях също се оценява с по (1 точка).

задача	1	2	3	4	5	6
отговор	В	Е	С	Д	А	11,91%